CHAPITRE 9 : Superpositions de deux signaux sinusoïdaux

Introduction

On envisage dans ce chapitre différentes situations où deux signaux sinusoïdaux de même fréquence donnant le phénomène d'interférences. Puis on considèrera deux signaux de fréquences voisines donnant le phénomène de battements. Enfin, on étudiera un nouveau type d'onde obtenu par superpositions de deux ondes progressant en sens inverse, l'onde stationnaire.

1. Interférences entre deux ondes de même fréquence

1.1. Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence

1.1.1. Calcul de l'amplitude du signal résultant

Méthode analytique

Soit les deux signaux $s_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$. Quelle est l'amplitude du signal $s(t) = s_1(t) + s_1(t)$? On peut ecrire le signal résultant sous la forme :

$$s(t) = s_1(t) + s_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\Rightarrow s(t) = [A_1\cos(\varphi_1)\cos(\omega t) - A_1\sin(\varphi_1)\sin(\omega t)] + [A_2\cos(\varphi_2)\cos(\omega t) - A_2\sin(\varphi_2)\sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow s(t) = [A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_2)]\cos(\omega t) - [A_1\sin(\varphi_1) + A_2\sin(\varphi_2)]\sin(\omega t) \quad (1)$$

on sait que $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$. Comme

$$s(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos(\varphi)\cos(\omega t) - A\sin(\varphi)\sin(\omega t)$$

Par identification à (1), on a:

$$\left.\begin{array}{l} A\cos(\varphi) = A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_2) \\ A\sin(\varphi) = A_1\sin(\varphi_1) + A_2\sin(\varphi_2) \end{array}\right\} \Rightarrow A^2 = \begin{array}{c} [A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_2)]^2 \\ + \\ [A_1\sin(\varphi_1) + A_2\sin(\varphi_2)]^2 \end{array}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2[\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)]$$

$$\Rightarrow A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

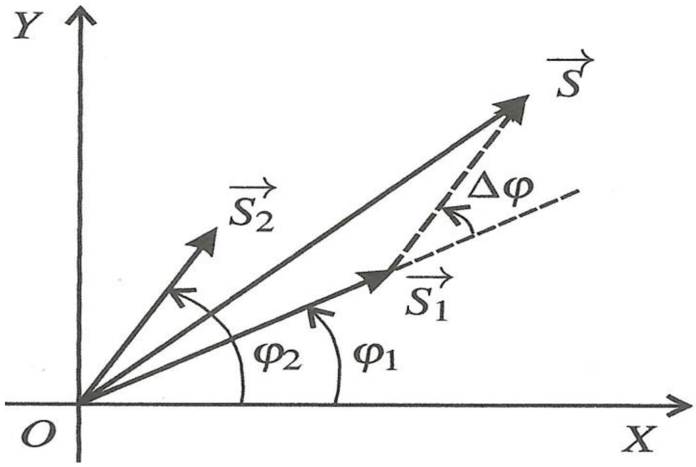
Le signal résultant de la superposition de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence d'amplitudes A_1 et A_2 et de phases initiales φ_1 et φ_2 est un signal sinusoïdal de même fréquence et d'amplitude donnée par **la formule des interférences** :

$$\boxed{\boldsymbol{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}}$$

Cette amplitude n'est pas égale à la somme des amplitudes des deux signaux.

- **Méthode géométrique**

La formule de l'amplitude A peut s'établir simplement en utilisant la représentation des signaux sinusoïdaux par les vecteurs de Fresnel.



La figure représente les vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$ correspondent respectivement aux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ (sur cette figure tous les vecteurs de Fresnel sont représentés à l'instant $t = 0$. Les normes de ces vecteurs sont égales aux amplitudes des signaux :

$$\|\vec{S}_1\| = A_1 \quad et \ \|\vec{S}_2\| = A_2$$

On a représenté aussi le vecteur de Fresnel du signal somme $s(t)$: $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$

L'amplitude A de $s(t)$ est donné par :

$$A^2 = \|\vec{S}\|^2 = \vec{S}^2 = (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1.\vec{S}_2$$

$$\Rightarrow A^2 = \|\vec{S}_1\|^2 + \|\vec{S}_2\|^2 + 2\|\vec{S}_1\|\|\vec{S}_2\| \cos\left(\widehat{\vec{S}_1.\vec{S}_2}\right) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi$$

$$\boldsymbol{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1^2\cos\Delta\varphi}}$$

Où $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ est l'angle entre les vecteurs $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$. On retrouve bien la formule de l'amplitude A.

1.1.2.Maximum et minimum d'amplitude

Les amplitudes A_1 et A_2 étant fixées, l'amplitude A est maximale lorsque $\cos\Delta\varphi = 1$, soit $\Delta\varphi = m \times 2\pi$ où m est un entier relatif.

L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est maximale lorsque les signaux sont en phase.

La valeur maximale de A est :

$$A_{max} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{A_{max} = A_1 + A_2}}$$

L'amplitude A est minimale lorsque $\cos\Delta\varphi = -1$, soit $\Delta\varphi = \pi + m \times 2\pi$ où m est un entier relatif.

L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est minimale lorsque les signaux sont en opposition de phase.

La valeur minimale de A est :

$$A_{min} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{A_{min} = |A_1 - A_2|}}$$

1.1.3.Cas de deux ondes de même amplitude

Dans le cas où les deux ondes ont des amplitudes égales on a :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_1^2 + 2A_1^2\cos\Delta\varphi} = A_1\sqrt{2 + 2\cos\Delta\varphi} \Longrightarrow A = 2A_1\left|\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right|$$

Les valeurs maximale et minimale de A sont dans ce cas :

$$\boxed{\boldsymbol{A_{max} = 2A_1}} \qquad \boxed{\boldsymbol{A_{min} = 0}}$$

Ainsi la superposition de deux ondes en opposition de phase peut donner un signal nul. Ceci est utilisé pour les isolations phoniques actives de certains casques. Un dispositif capte le bruit ambiant et envoie dans l'oreille un signal exactement en opposition de phase qui annule ce bruit.

1.2. Phénomènes d'interférences

Lorsque deux ondes de même nature et de même fréquence parviennent en un point elles se superposent : leurs signaux s'additionnent. Cependant leurs amplitudes ne s'additionnent pas. En effet le calcul de l'amplitude du signal résultant dépend du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ entre les deux signaux. Or ce déphasage varie d'un point à un autre. L'onde résultante a alors une amplitude modulée dans l'espace. C'est le phénomène d'interférences.

1.2.1.Interférences constructives et destructives

La nature d'un point S de la surface dépend du déphasage qui existe entre les deux signaux qui lui parviennent, c'est-à-dire des distances relatives qui le séparent des points sources S_1 et S_2. Ce déphasage s'écrit en fonction de la pulsation spatiale k, elle-même liée à la longueur d'onde λ et à la différence entre les deux trajets S_2S et S_1S appelée différence de marche et notée δ.

$$\Delta\varphi_S = \varphi_2 - \varphi_1 \text{ et } \begin{cases} \varphi_1 = k \times (S_1S) \\ \varphi_2 = k \times (S_2S) \end{cases} \Longrightarrow \Delta\varphi_S = k(S_2S - S_1S)$$

Lorsque deux ondes sinusoïdales de même fréquence sont émises par deux points sources S_1 et S_2 en phase, on appelle différence de marche au point S du milieu de propagation, la quantité $\delta = S_2S - S_1S$.

Le déphasage entre les deux ondes s'écrit au point S :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\Delta\varphi_S = \frac{2\pi}{\lambda}(S_2S - S_1S) = \frac{2\pi\delta}{\lambda}}}$$

- **Les interférences constructives** se produisent aux points où les ondes parviennent en phase, pour $\Delta\varphi_S = 0\ [2\pi]$. Pour ces points, la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde.

$$\Delta\varphi_S = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = 2m\pi \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\delta = m\lambda}}$$

  où m est un entier relatif

- **Les interférences destructives** se produisent aux points où les ondes parviennent en opposition de phase, pour $\Delta\varphi_S = \pi\ [2\pi]$. Pour ces points, la différence de marche vérifie.

$$\Delta\varphi_S = \frac{2\pi\delta}{\lambda} = (2m+1)\pi \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}}$$

  où m est un entier relatif

2. Ondes stationnaires et modes propres

2.1. Superposition de deux ondes progressives de même amplitude

On étudiera la superposition dans tout l'espace de deux ondes de même fréquence et même amplitude se propageant en sens inverse. Ces deux ondes progressives s'écrivent :

$$s_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$$
$$s_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$$

où $k = \omega/c$.

Elles se propagent le long de l'axe (Ox) en sens opposées. En utilisant la formule trigonométrique

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

On peut écrire l'onde qui résulte de la superposition de ces deux ondes $s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t)$ sous la forme :

$$s(x,t) = 2A\cos\left(kx + \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)\right)\cos\left(\omega t + \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_1)\right)$$

Cette expression mathématique montre que l'onde $s(x,t)$ est de nature totalement différente des ondes $s_1(x,t)$ et $s_2(x,t)$. En effet, on n'a plus la combinaison linéaire $\omega t - kx$ ou $\omega t + kx$ qui traduit la propagation d'une onde, mais au contraire une séparation de la variable spatiale x et de la variable temporelle t. Une telle onde ne se propage pas mais vibre sur place et elle est appelée **onde stationnaire**.

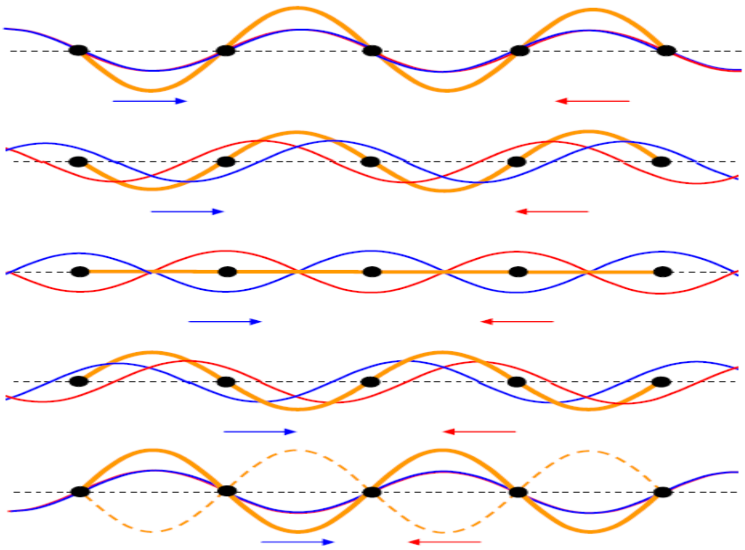
2.2. Onde stationnaire

2.2.1.Définition

Une onde stationnaire harmonique est une onde de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{s(x,t) = 2A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)}}$$

avec $k = \omega/c$ où c est la célérité des ondes progressives de même nature physique. L'onde stationnaire est égale à la superposition de 2 ondes progressives sinusoïdales de pulsation ω se propageant en sens inverse le long de l'axe (Ox) , ayant la même amplitude A.



2.2.2.Nœuds et ventre de vibration

L'amplitude de l'onde $s(x,t)$ dépend de la position x (alors que ce n'est pas le cas pour une onde progressive) et elle est donnée par :

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{A}(x) = |2A\cos(kx + \psi)|}}$$

On appelle **nœuds de vibration**, les points pour lesquels l'onde stationnaire est nulle à chaque instant. Ce sont les points pour lesquelles $\mathcal{A}(x) = 0$, leurs abscisses x vérifient :

$$\cos(kx + \psi) = 0 \Longrightarrow kx + \psi = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ ,avec } n \text{ entier}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\psi}{k} + \frac{\pi}{2k} + n\frac{\pi}{k} \text{ ,avec } n \text{ entier}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -\frac{\psi}{k} + \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} \text{ ,avec } n \text{ entier}}}$$

Les nœuds de vibration sont donc régulièrement espacés et la distance entre deux nœuds consécutifs est $\lambda/2$.

Il existe aussi des points en lesquels l'amplitude $\mathcal{A}(x)$ de l'onde stationnaire est maximale. Ces points sont appelés **ventres de vibration.** Ce sont les points pour lesquels $\mathcal{A}(x) = 2A$; leurs abscisses x verifient :

$$\cos(kx + \psi) = \pm 1 \Rightarrow kx + \psi = n\pi \text{ ,avec } n \text{ entier}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{\psi}{k} + n\frac{\pi}{k} \text{ ,avec } n \text{ entier}$$

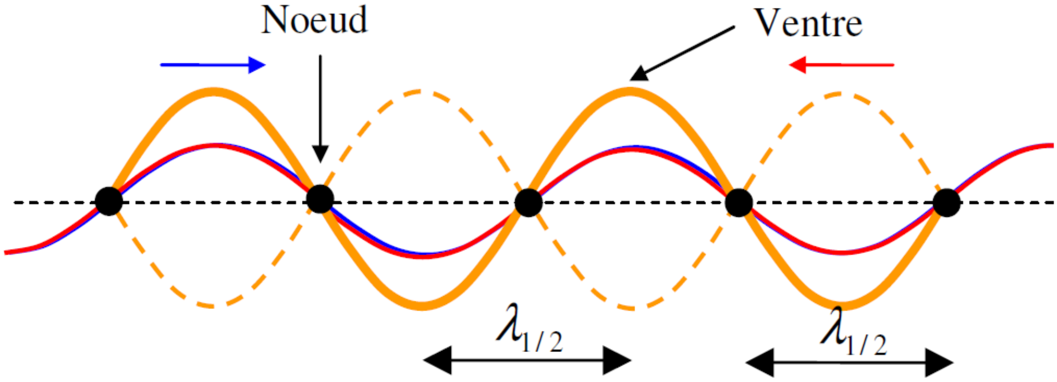
$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{x = -\frac{\psi}{k} + n\frac{\lambda}{2} \text{ ,avec } n \text{ entier}}}$$

Les ventres de vibration sont donc régulièrement espacés et la distance entre 2 ventres consécutifs est $\lambda/2$.

De plus, le milieu de 2 nœuds de vibration consécutifs est un ventre de vibration et vice versa.

Récapitulons :

- les nœuds de vibration sont les points où la vibration s'annule quelle que soit la date t
- les ventres de vibration sont les points où l'amplitude de la vibration est maximale.
- les nœuds et les ventres sont disposés de manière alternée. La distance entre un nœud et un ventre consécutif est $\lambda/4$. La distance entre 2 nœuds ou deux ventres consécutifs est $\lambda/2$.
- l'existence de nœuds et de ventres de vibration est une propriété caractéristique des ondes stationnaires.



2.2.3.Phase initiale de l'onde stationnaire

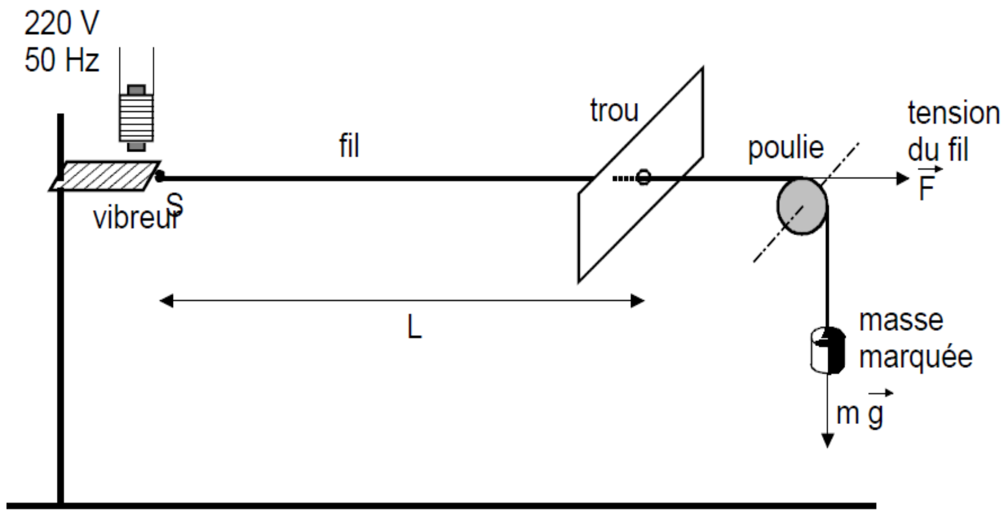
L'onde stationnaire $s(x,t)$ peut s'écrire :

- si $\cos(kx+\psi) > 0$; $s(x,t) = \mathcal{A}(x)\cos(\omega t+\varphi)$
- si $\cos(kx+\psi) < 0$; $s(x,t) = -\mathcal{A}(x)\cos(\omega t+\varphi) = \mathcal{A}(x)\cos(\omega t+\varphi+\pi)$

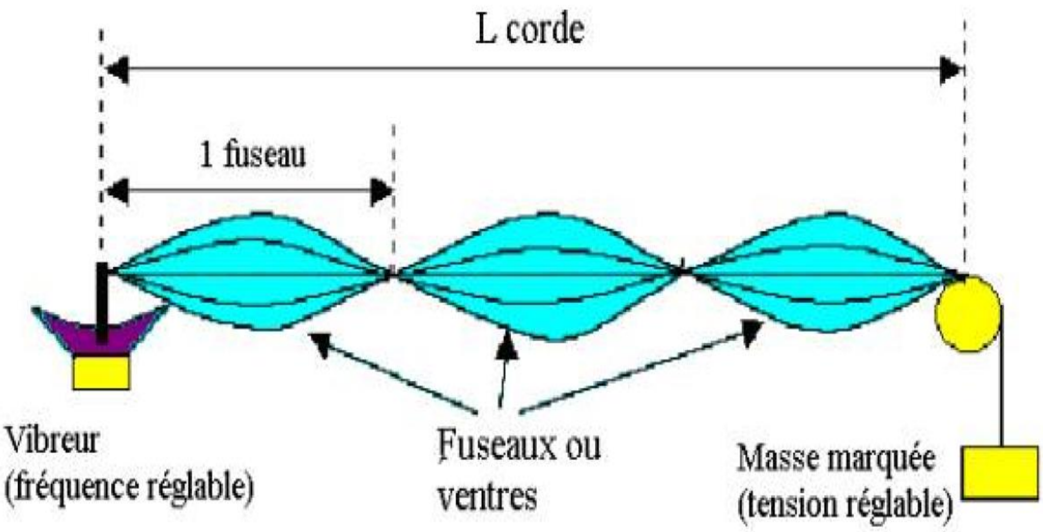
Ainsi la phase initiale de l'onde stationnaire ne prend que deux valeurs, φ et $\varphi+\pi$. Les vibrations en deux points sont soit en phase, soit en opposition de phase. Entre deux nœuds, l'ensemble des points vibrent en phase. Lorsqu'on passe un nœud, la phase change de π.

2.3. Corde de Melde

Une corde de longueur L est placée horizontalement sur deux tiges en fer. À l'une des extrémités de la corde nous attachons un poids de masse m. Un vibreur fait vibrer la corde selon une intensité variable.



Nous constatons qu'il se produit un mouvement particulier de la corde qui présente des ventres et des nœuds en différents points. Des ondes stationnaires s'établissent donc le long de la corde. Les vibrations peuvent être transversales, longitudinales.



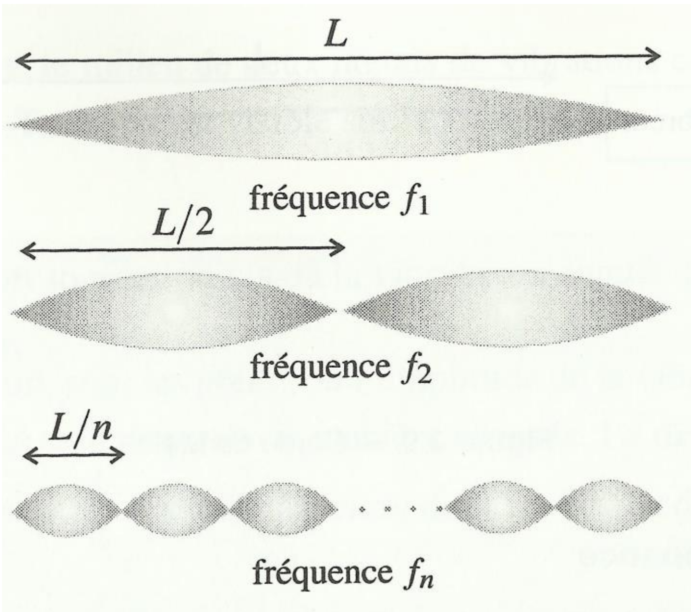
2.3.1.Phénomènes de résonance

Lorsqu'on augmente progressivement f, on constate que la corde prend pour certaines fréquences particulières, un mouvement d'amplitude très supérieure à l'amplitude du vibreur pouvant valoir une dizaine de centimètres. On dit que la corde entre en résonance pour ces fréquences particulières. On peut exprimer les fréquences f_n de résonance de la corde. On sait que la distance entre deux nœuds de vibration consécutifs d'une onde stationnaire est égale à $\lambda/2$ où λ est la longueur d'onde. C'est la longueur d'un fuseau. Lorsque la corde forme n fuseaux on a :

$$\boxed{\boldsymbol{L = n\frac{\lambda}{2} \quad \text{soit} \quad \lambda = \lambda_n = \frac{2L}{n}}}$$

On en déduit la fréquence f_n de l'onde **:**

$$\boxed{\boldsymbol{f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2L}}}$$



L'expression théorique des fréquences de résonance de la corde est :

$$\boxed{\boldsymbol{f_n = nf_1 \quad \text{où} \quad f_1 = \frac{c}{2L}}}$$

c l'expression de la célérité des ondes transversales sur la corde est donnée par la relation :

$$\boxed{\boldsymbol{c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}}$$

Où T est la tension de la corde et μ sa masse linéique

Récapitulatif

- Il se propage le long de la corde un très grand nombre d'ondes provenant des réflexions aux deux extrémités.
- Les fréquences de résonance sont celles pour lesquelles il y a interférence constructrice entre les ondes se propageant dans le même sens ;
- La superposition entre les ondes se propageant dans les deux sens donne une onde stationnaire.

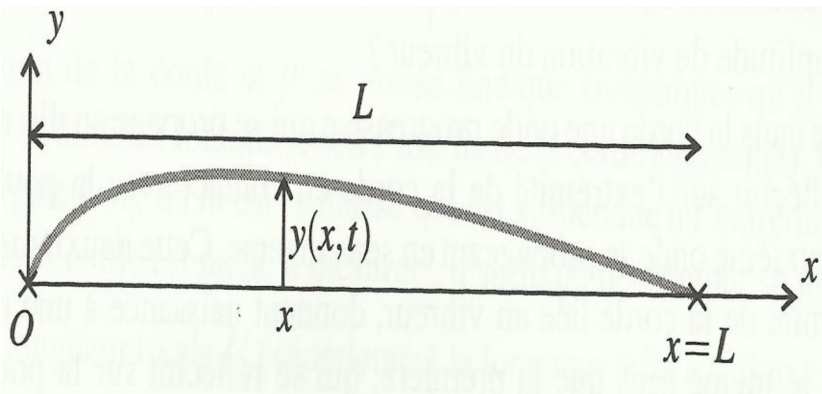
2.4. Modes propres

On s'intéresse aux vibrations d'une corde de longueur L finie, fixée entre deux points (il s'agit par exemple d'une corde de guitare). Ces vibrations sont des superpositions de vibrations sinusoidales appelés modes propres.

2.4.1.Ondes stationnaires sur une corde de longueur L finie

On recherche les ondes stationnaires pouvant exister sur une corde de longueur L dont les extremités sont fixes.

On prend un axe (Ox) le long de la corde. Les deux extremités fixes de la corde étant $x = 0$ et $x = L$. On suppose que la corde reste comprise dans le plan (Oxy) et on appelle $y(x,t)$ le deplacement supposé transversal du point de la corde d'abscisse x.



Les conditions physiques de fixation de la corde en ses extrémités se traduisent mathématiquement par les conditions aux limites :

$$y(0,t) = 0 \quad et \quad y(L,t) = 0$$

On cherche une onde stationnaire $y(x,t)$ de la forme :

$$y(x,t) = 2A\cos(kx + \psi)\cos(\omega t + \varphi)$$

avec $k = \omega/c$.

Les conditions aux limites imposent que les deux extrémités de la corde soient des nœuds de vibration, soit

$$\cos(\psi) = 0 \;\; et \quad \cos(kL + \psi) = 0$$

$$\cos(\psi) = 0 \Longrightarrow \psi = \pm\frac{\pi}{2}$$

Du fait que

$$\cos\left(kx - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(kx + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(kx)$$

on prendra $\psi = -\pi/2$ de sorte que

$$\cos(kx + \psi) = \sin(kx)$$

La condition $\cos(kL + \psi) = \sin(kL) = 0$ devient $kL = n\pi$. Les valeurs possibles de k sont donc :

$$\boxed{\boldsymbol{k_n = n\frac{\pi}{L}}, \;\; \textbf{avec } \boldsymbol{n \; entier}}$$

On en déduit les valeurs possibles de la pulsation ω, en notant c la celerité des ondes se propageant le long de la corde :

$$\boxed{\boldsymbol{\omega_n = ck_n = n\frac{\pi c}{L}}\;, \textbf{avec } \boldsymbol{n \; entier}}$$

Les ondes stationnaires pouvant exister sur une corde de longueur L fixée en ses extremités sont :

$$\boxed{\boldsymbol{y(x,t) = A\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{\pi c}{L}t + \varphi\right)}}$$

où n est un entier, A et φ sont des constantes quelconques.

Ce sont les modes propres de vibration de la corde. Les fréquences des modes propres appelées fréquences propres sont :

$$\boxed{\boldsymbol{f_n = n\frac{c}{2L}}}$$

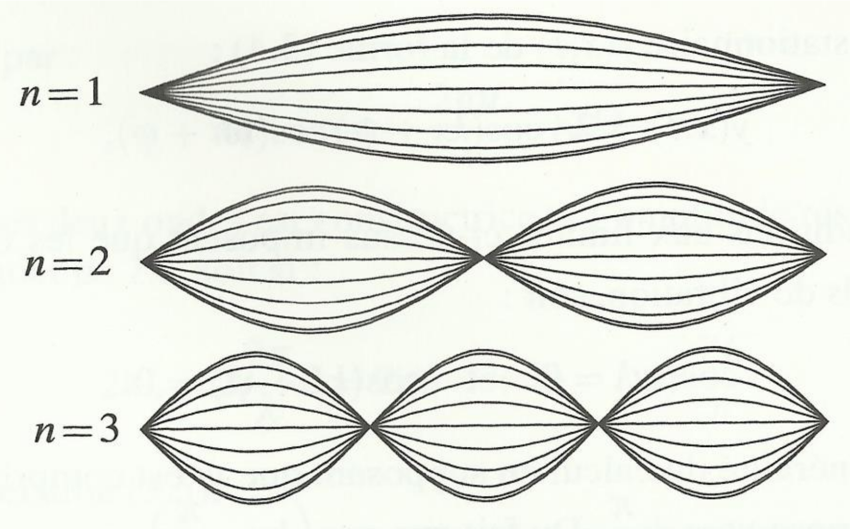
Les longueurs d'ondes correspondantes

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}}}$$

sont les sous-multiples entiers de $2L$.

Le premier mode $n = 1$ est le premier harmonique aussi appelé fondamental. Lorsqu'elle vibre pour ce mode, la corde prend l'aspect d'un fuseau. Le deuxième harmonique $(n = 2)$ donne à la corde l'aspect de 2 fuseaux et ainsi de suite.

L'aspect de la corde pour les trois premiers modes propres est représenté sur la figure suivante :



2.4.2. Mouvement général de la corde

Les modes propres sont les vibrations sinusoïdales de la corde. Le mouvement le plus général de la corde n'est pas sinusoïdal mais c'est une superposition des différents modes propres. Le mouvement le plus général de la corde est obtenu par superposition linéaire de tous ses modes propres soit :

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right)\cos\left(n\frac{\pi c}{L}t + \varphi_n\right)}$$

où les A_n et φ_n sont des constantes quelconques qui dépendent des conditions initiales du mouvement. Comme les modes ont des fréquences toutes multiples de f_1, le mouvement est periodique de fréquence f_1.

- **Exercice d'application**

Une corde de guitare est en acier de masse volumique $\rho = 7{,}87.10^3 \pm 3$ Kg.m^{-3}. La corde a un diamètre $D = 0{,}300 \pm 0{,}001$ mm. La longueur de la corde est $L = 64{,}0 \pm 0{,}2\ cm$. La tension de la corde est $T = 100 \pm 1N$.

1. Calculer la célérité c.
2. Calculer la longueur d'onde du mode fondamental et sa fréquence fondamentale.